

Chapter 3

Champs dans la matière

νόμωι (γάρ φησι) γλυκὺ καὶ νόμωι πικρὸν, νόμωι θερμόν,
νόμωι ψυχρόν, νόμωι χροίη, ἕτερι δὲ ἄτομα καὶ κενόν

Démocrite

3.1 Introduction

Les équations de Maxwell, telles qu'elles étaient présentées dans le chapitre 1, ne sont valables que pour des systèmes de charges et champs dans le vide. On sait aujourd'hui qu'au fond on peut considérer tout système physique comme étant composée des particules élémentaires qui interagissent à travers le vide. Toutefois, pour une description de la matière il suffit de considérer l'échelle d'atomes et des molécules, mais même cette échelle est très petite, ayant l'ordre de grandeur du rayon de Bohr ($a_B \approx 5.3 \times 10^{-9}$ cm).

En principe tout problème typique d'électrodynamique est simple¹: il s'agit de calculer la configuration des champs et particules chargées qui résout les équations de Maxwell à l'échelle microscopique pour une configuration des constituants donnée. D'un côté cette approche est extrêmement compliquée pour des systèmes réalistes, d'autre côté il n'est pas nécessaire pour la plupart des applications. Si l'on s'intéresse

¹Nous négligeons ici comme dans le reste du cours les effets de la mécanique quantique.

aux phénomènes qui se déroulent aux échelles macroscopiques devant l'échelle fondamentale (disons l'échelle d'atomes et des molécules), une description effective devient possible, qui consiste à définir des champs, dits macroscopiques, qui représentent une moyenne des champs microscopiques qui, eux-mêmes, varient de façon significative à l'échelle des atomes et des molécules mais qui se réduisent aux champs effectifs avec une variation caractéristique qui peut être considéré macroscopique au moyenne.

Remarque: Dans ce chapitre seulement, nous dénotons les champs microscopiques par $\mathbf{e}(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{b}(t, \mathbf{x})$, et les champs macroscopiques par $\mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ (ainsi que $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$). Strictement dit les champs utilisés dans les chapitres ci-avant sont les champs microscopiques \mathbf{e} et \mathbf{b} , mais comme nous le verrons par la suite, dans le vide, la distinction entre (\mathbf{e}, \mathbf{b}) et (\mathbf{E}, \mathbf{B}) est académique. Les deux paires satisfont aux mêmes équations.

L'approche macroscopique n'est pas seulement une commodité, car on se rend compte que la plupart des expériences ainsi qu'applications de l'électrodynamique se déroulent à l'échelle macroscopique (par exemple le radar, la radio, la physique des accélérateurs, ...). Un tel appareil est incapable de mesurer les effets à l'échelle microscopique est ne réagit qu'à la moyenne sur les phénomènes microscopiques. C'est la raison pour laquelle historiquement, les phénomènes décrits par les pionniers du sujet, comme par exemple Ampère et Faraday, étaient ceux qui appartiennent aux équations macroscopiques.

Au premier debut la question se pose quelle sorte de moyenne il serait prudent d'utiliser? Premièrement on devrait choisir une échelle macroscopique R avec $R \gg a_B$ dans le cas discuté ci-dessus, et en général avec $R \gg a_{\text{micro}}$ quelque soit l'échelle microscopique, a_{micro} , s'appliquant au problème sous investigation.

Soit $F(t, \mathbf{x})$ une quantité que nous aimerions moyenner. A cette fin on introduit une fonction $f(\mathbf{x})$, dénommé *fonction test*, telle que

$$\langle F(t, \mathbf{x}) \rangle := \int d^3x' f(\mathbf{x}') F(t, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (3.1)$$

Afin d'implémenter une moyenne sur l'échelle R on devrait choisir la fonction test de telle façon qu'elle soit nulle où exponentiellement petite en dehors un volume

centré au point $\mathbf{x} = 0$ avec dimension linéaire R . Deux choix souvent utilisés sont les fonctions

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3} & |\mathbf{x}| < R \\ 0 & |\mathbf{x}| > R \end{cases} \quad (3.2)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(\pi R^2)^{-3/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/R^2}$$

La deuxième forme a l'avantage qu'elle est lisse, tandis que la première est discontinue. Pourtant nous n'avons pas besoin de la forme spécifique de $f(\mathbf{x})$ dans la suite. Il suffit de constater qu'un choix existe qui correspond à nos besoins de moyenner sur une échelle R donné. Cette définition de la moyenne conduit à

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle F(t, \mathbf{x}) \rangle = \int d^3x' f(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial x_i} F(t, \mathbf{x} - \mathbf{x}') = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x_i} \right\rangle \quad (3.3)$$

et, de même

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle F(t, \mathbf{x}) \rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle \quad (3.4)$$

Avec cette procédure de moyenner en main, nous définissons les champs macroscopiques (c'est-à-dire moyennés)

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{e}(t, \mathbf{x}) \rangle \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B}(t, \mathbf{x}) = \langle \mathbf{b}(t, \mathbf{x}) \rangle \quad (3.6)$$

Nous allons mettre la procédure de ce paragraphe à profit en moyennant sur les équations microscopiques de Maxwell.

3.1.1 Relation aux équations microscopiques

[Jackson §6.6; Schwinger Chapitre 4]

Soit ρ_m la densité microscopique de charge, et soit \mathbf{j}_m la distribution microscopique de courant. Soient $\mathbf{e}(t, \mathbf{x})$ et $\mathbf{b}(t, \mathbf{x})$ les champs microscopiques. Les équations de

Maxwell s'écrivent alors

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = 4\pi\rho_m, \quad (3.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_m, \quad (3.10)$$

Les équations homogènes sont triviales à moyenner, donnant lieu aux équations (1.23) et (1.24). Pour les équations inhomogènes on doit aussi moyenner les sources y apparaissantes. Commençons avec (3.7).

La densité de charge microscopique n'est rien d'autre que la distribution due aux toutes les charges ponctuelles dans un volume V donné. Alors, on a

$$\rho_m = \sum_{j=1}^{N_{\text{tot}}} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \quad (3.11)$$

d'où le courant se découle de la forme

$$\mathbf{j}_m = \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \quad (3.12)$$

On distingue deux différents types de contributions à (3.11), les *charges libres*, et les *charges liées*. L'idée derrière cette partition est qu'un milieu comprend des charges dans des états liés, comme par exemple dans une molécule, et parfois des charges libres, qui se déplacent à travers le volume entier. Les charges liées peuvent être déplacées un peu (polarisation des molécules), mais il ne peuvent pas échapper à leur molécule. Toute autre charge qui n'est pas liée de cette façon est mobile et par conséquent dénommée libre. Les charges libres donnent lieu à la densité

$$\rho_{\text{libre}} = \sum_{j \text{ libre}} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j(t)) \quad (3.13)$$

tandis que les charges liées dans les molécules donnent lieu à

$$\rho_{\text{lié}} = \sum_{n \text{ (molécules)}} \rho_n(t, \mathbf{x}) \quad (3.14)$$

où $\rho_n(t, \mathbf{x})$ est la distribution de charge de la $n^{\text{ième}}$ molécule et la somme est sur toutes les molécules dans un volume macroscopique de la matière. La densité de la $n^{\text{ième}}$ molécule s'écrit

$$\rho_n(t, \mathbf{x}) = \sum_{j(n)} q_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (3.15)$$

où la somme sur j prend en compte toutes les charges dans une molécule donnée. La notation $j(n)$ dénote la $j^{\text{ième}}$ charge de la $n^{\text{ième}}$ molécule. Nous avons supprimé la dépendance du temps au membre de droite, afin de simplifier la notation.

Considérons d'abord la moyenne sur une molécule donnée, nous sommerons sur toutes les molécules par la suite. Soit \mathbf{x}_j la position de la $j^{\text{ième}}$ charge de cette molécule. Alors

$$\begin{aligned} \langle \rho_n(t, \mathbf{x}) \rangle &= \int d^3x' f(\mathbf{x}') \rho_n(t, \mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \sum_{j(n)} \int d^3x' f(\mathbf{x}') \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}' - \mathbf{x}_j) \\ &= \sum_{j(n)} q_j f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Soit \mathbf{x}_n la position de la molécule (par convention on choisit la position du centre de charge). La position de la $j^{\text{ième}}$ charge s'écrit alors

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_n + \Delta \mathbf{x}_{j(n)} \quad \text{avec} \quad |\Delta \mathbf{x}_{j(n)}| \ll |\mathbf{x}_n|, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n| \quad (3.17)$$

La distance $|\Delta \mathbf{x}_{j(n)}|$ est de l'ordre d'une distance atomique, est par conséquent très petite devant les autres grandeurs apparaissant ci-dessus. Il est donc naturel de développer $\langle \rho_n(t, \mathbf{x}) \rangle = \sum_{j(n)} q_j f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n - \Delta \mathbf{x}_{j(n)})$ dans une série de Taylor dans la petite quantité $\Delta \mathbf{x}_{j(n)}$, ce qui conduit à

$$\langle \rho_n(t, \mathbf{x}) \rangle = \sum_{j(n)} q_j f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \sum_{j(n)} q_j \Delta \mathbf{x}_{j(n)} \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \dots \quad (3.18)$$

où les termes supprimés sont de l'ordre $\mathcal{O}(\Delta \mathbf{x}_{j(n)}^2)$. On s'aperçoit que

1. Le terme

$$Q_n = \sum_{j(n)} q_j \quad (3.19)$$

est la charge totale de la molécule.

2. Le terme

$$\mathbf{p}_n = \sum_{j(n)} q_j \Delta \mathbf{x}_{j(n)} \quad (3.20)$$

est le moment dipolaire total de la molécule.

3. Les termes supprimés donneraient lieu à des moments quadripolaires et plus hauts, mais sont de plus en plus négligeables.

A l'aide de ces identifications la charge moyennée s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \rho_n(t, \mathbf{x}) \rangle &= Q_n f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) - \mathbf{p}_n \cdot \nabla f(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) + \dots \\ &= \langle Q_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle - \nabla \cdot \langle \mathbf{p}_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dans la deuxième ligne on a exprimé les quantités apparaissantes dans la première ligne en terme des expressions moyennées par rapport à la fonction test $f(\mathbf{x})$ (exercice: vérifier que la deuxième ligne se réduit à la première si l'on utilise la procédure de moyennage $\langle \cdot \rangle$ définie auparavant). L'effet du moyennage était donc de remplacer les détails microscopiques de la molécule par un ensemble de multipôles situés au centre de charge de la molécule.

La sommation sur toutes les molécules se fait maintenant aisément, et on trouve la densité moyenné totale

$$\langle \rho(t, \mathbf{x}) \rangle = \rho(t, \mathbf{x}) - \nabla \cdot \mathbf{P}(t, \mathbf{x}) + \dots \quad (3.22)$$

où

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \left\langle \sum_{j=1}^{N_{\text{tot libre}}} q_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \sum_{n \text{ (molécules)}}^{N_{\text{mol}}} Q_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (3.23)$$

comprend la contribution des charges libres (un nombre $N_{\text{tot libre}}$ en total) ainsi que la contribution de toutes les molécules (un nombre N_{mol} en total), en utilisant l'expression que nous venons de démontrer pour une molécule donnée. Finalement

le terme dipolaire total s'écrit

$$\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) = \left\langle \sum_{n \text{ (molécules)}} \mathbf{p}_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (3.24)$$

En portant ces expressions dans la première équation microscopique (3.7) et en utilisant (3.5) l'équation macroscopique se découle

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{x}) - \nabla \cdot 4\pi\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) \quad (3.25)$$

La forme de cette relation suggère qu'on définisse le champ auxiliaire $\mathbf{D}(t, \mathbf{x})$ comme suit

$$\mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) + 4\pi\mathbf{P}(t, \mathbf{x}) \quad (3.26)$$

ce qui donne lieu à l'équation macroscopique

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(t, \mathbf{x}) = 4\pi\rho(t, \mathbf{x}) \quad (3.27)$$

où $\rho(t, \mathbf{x})$ est la densité de charge moyennée sur un volume de taille caractéristique R^3 et donc une fonction qui varie légèrement sur le domaine d'intérêt. Il est souvent le cas que les molécules sont neutres individuellement, ce qui implique que $\rho(t, \mathbf{x})$ compte que les charges libres, les effets des champs appliqués sur la matière étant entièrement regroupés dans la polarisation \mathbf{P} .

Nous devons maintenant effectuer le même travail pour la moyenne du courant microscopique \mathbf{j}_m . Pour ceci les manipulations ci-avant s'appliquent, mutatis mutandis, sauf que les démonstrations sont beaucoup plus pénibles. Nous donnerons ici que les résultats². L'équation microscopique (3.10) moyennée donne lieu à l'équation macroscopique

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + c \nabla \times \mathbf{M} \right) \quad (3.28)$$

Ici le courant moyenné s'écrit

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \left\langle \sum_{j \text{ libre}} q_j \mathbf{v}_j \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) + \sum_{n \text{ (molécules)}} Q_n \mathbf{v}_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad (3.29)$$

²Pour ceux qui souhaitent lire un traitement complète je recommande le livre de J. Schwinger.

l'analogie magnétique de la charge moyennée (3.23). La grandeur \mathbf{M} , la magnétisation

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{x}) = \left\langle \sum_{n \text{ (molécules)}} \mathbf{m}_n \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \right\rangle \quad \text{avec} \quad \mathbf{m}_n = \sum_{j(n)} \frac{q_j}{2} \Delta \mathbf{x}_{j(n)} \times \mathbf{v}_{j(n)} \quad (3.30)$$

est l'analogie magnétique de la polarisation \mathbf{P} . La forme de l'équation (3.28) suggère qu'on définit le champ auxiliaire $\mathbf{H}(t, \mathbf{x})$ tel que

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) - 4\pi \mathbf{M}(t, \mathbf{x}) \quad (3.31)$$

ce qui donne lieu à l'équation macroscopique

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (3.32)$$

Remarque sur les échelles: Le lecteur aura probablement déjà remarqué que nous n'avons pas moyenné sur le temps, la définition ci-dessus étant seulement une moyenne spatiale. Toute matière connue étant composée des atomes, qui ont, comme nous l'avons dit, une taille d'environ $1a_B \sim 10^{-9} \text{cm}$, on dirait que la limite supérieure d'une description microscopique est d'environ $L_0 \sim 10^{-6} \text{cm} \sim 100 \text{\AA}$. Le rayonnement électromagnétique qui correspond à une telle longueur d'onde à une fréquence typique d'environ 10^{17}s^{-1} . Un petit volume de taille L_0^3 contient 10^6 atomes, et par conséquent leurs oscillations temporelles seront entièrement absorbées par la moyenne spatiale, c'est-à-dire qu'une espèce d'auto-moyennage temporel se déroule en moyennant seulement sur l'espace. Un traitement qui prend la moyenne temporelle de façon explicite se trouve dans le livre de Schwinger, mais le résultat, à savoir les relations entre les équations microscopiques et macroscopique reste le même.

3.1.2 Les équations dans la matière

Résumons maintenant ce que nous avons appris. Les équations de Maxwell dans la matière, autrement dit les équations macroscopiques, s'écrivent

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (3.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.34)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.35)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (3.36)$$

Dans des milieux simples les champs dites macroscopiques (\mathbf{D} & \mathbf{H}) sont liés aux champs microscopiques (\mathbf{E} & \mathbf{B}) comme suit

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \quad (3.37)$$

Dans un milieu *diélectrique linéaire* on a

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} = (1 + 4\pi\chi_e) \mathbf{E} \quad (3.38)$$

où nous avons introduit³ la *susceptibilité électrique*, χ_e .

De façon analogue la magnetisation s'écrit

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{B} \quad \text{et donc} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = (1 - 4\pi\chi_m) \mathbf{B} \quad (3.39)$$

La susceptibilité magnétique, χ_m est souvent très petite, telle que $|\mu - 1| \sim 10^{-5}$, et on distingue deux cas principaux

1. Si $\chi_m > 0$, alors $\mathbf{M} \parallel \mathbf{B}$ et on parle du *paramagnétisme*.
2. Si $\chi_m < 0$, alors $\mathbf{M} \parallel (-\mathbf{B})$ et on parle du *diamagnétisme*.

³Dans le chapitre 4.6 nous analyserons un modèle microscopique pour χ_e .

3.1.3 Théorème de Poynting dans la matière

Dans le paragraphe 1.6.3 nous avons étudié la loi de conservation d'énergie pour les équations de Maxwell couplées à un système de charges dans le vide. Ces équations, nous l'avons mentionné, sont ce qu'on a appelé ici les équations microscopiques. Elles donnent lieu alors aux lois de conservation fondamentales dans le sens qu'elles décrivent la redistribution d'énergie entre les champs et la distribution microscopique de charge. Du point de vue fondamental la conservation d'énergie est donc assurée. Cependant nous avons vu que les équations de Maxwell dans la matière s'écrivent d'une forme analogue aux équations fondamentales, en utilisant les champs \mathbf{D} et \mathbf{H} , ainsi qu'une équation constitutive qui donne le lien entre \mathbf{D} , \mathbf{H} et \mathbf{E} , \mathbf{B} . A l'ordre plus bas nous avons trouvé les relations (3.1.2), qui sont très utiles dans la plupart des applications, mais en toute généralité on a

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}[\mathbf{E}] , \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{B}] \quad (3.40)$$

en terme de deux fonctions arbitraires. Nous allons maintenant retracer la dérivation du théorème de Poynting, mais cette fois en terme des équations macroscopiques. La formulation en termes de ces grandeurs s'avérera très utile dans la suite. Il serait utile pour le lecteur de se rappeler de la logique du paragraphe 1.6.3, car la même stratégie s'applique ici.

Comme avant, nous écrivons pour le travail effectué par une distribution de charge contenue dans un volume V

$$\frac{dW}{dt} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV . \quad (3.41)$$

Puis nous éliminons le courant \mathbf{j} , cette fois à l'aide des équations (4.1 - 4.4). Ceci conduit à

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int_V dV \left[c \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \cdot \mathbf{E} \quad (3.42)$$

et à l'aide de la relation

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \quad (3.43)$$

on trouve

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{4\pi} \int_V \left[\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] \quad (3.44)$$

On conclut, par analogie que le premier terme en crochet est l'analogie du vecteur de Poynting dans la matière

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.45)$$

mais pour les autres termes, on ne peut pas aller plus loin sans une relation constitutive spécifique. Nous nous bornons à des milieux linéaires sans dispersion⁴. Sous ces conditions nous retombons aux relations (3.38) et (3.39) et on peut définir la densité d'énergie

$$u = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) \quad (3.46)$$

Le théorème de Poynting dans la matière s'écrit maintenant (exercice)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.47)$$

expression identique à (1.68) dans le vide, sauf que toutes les grandeurs ici font référence aux champs \mathbf{D} et \mathbf{H} . Il est donc clair que les mêmes manipulations qu'avant, mutatis mutandis, conduisent à la lois de conservation pour la quantité de mouvement. Ici nous ne citons que l'expression pour la quantité de mouvement, à savoir

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}}{4\pi c} \quad (3.48)$$

La situation peut devenir assez compliquée si l'on traite de milieux de dispersion non-nulle, dont quelques détails sont donnés dans [Jackson §6.7; Zangwill § 18.3]. Le dernier sujet qui nous reste à discuter pour les équations dans la matière sont les conditions aux bords. Passons maintenant à cette discussion.

3.1.4 Conditions aux bords

Les conditions aux bords pour les équations dans un milieu s'écoulent de la même façon que celles dans le vide (voir Figure 1.3), sauf que cette fois, ce sont les champs \mathbf{D} et \mathbf{H} qui interviennent dans les équations inhomogènes. Il serait donc une bonne

⁴La notion de dispersion sera abordé en détail dans la section 4.5. Maintenant il suffit de dire que l'absence de dispersion est équivalente au fait que ε et μ sont constants.

idée de revisiter la section 1.6.2 et adapter les manipulations à la situation dans un milieu (exercice). Le résultat sera

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 4\pi\sigma, \quad (3.49)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (3.50)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (3.51)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{K} \quad (3.52)$$

Comme nous l'allons découvrir, ces conditions aux bords sont à la base d'un grand nombre des phénomènes non-triviaux, lorsque on considère des situations dans lesquelles un rayonnement électromagnétique frappe l'interface entre deux milieux. C'est rien de moins que toute l'optique ondulatoire qui se découle à l'aide des équations dans la matière en combinaisons avec les conditions aux bords.