UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES

Electrodynamique II, série 1
distribué 21 février
à rendre: 27 février

Prof. Julian Sonner

1 Rappel du calcul vectoriel

Montrer que pour tous champs vectoriels $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, $\mathbf{C}(\mathbf{x})$, et $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ et pour toute fonction scalaire $\lambda(\mathbf{x})$:

a) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$

c) $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

d) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

e) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

f) $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

g) $\nabla (\lambda \mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \lambda (\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{A} \times \mathbf{B} \cdot \nabla \lambda$

2 La fonction de Green du Laplacien

On considère l'équation différentielle suivante, où $\delta(\mathbf{x})$ est la distribution de Dirac en trois dimensions,

$$-\Delta G(\mathbf{x}) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \ . \tag{2.1}$$

Remarque: La notation courante $\Delta\lambda := \nabla^2\lambda$ pour le Laplacien d'une fonction scalaire λ est utilisée dans cet exercice.

(a) Prendre d'abord le domaine de définition $\Omega = \mathbb{R}^3$. Montrer que la solution s'annulant à l'infini (c'est-à-dire pour $|\mathbf{x}| \to \infty$) est

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \ .$$

Indication: Utiliser la transformée de Fourier et l'intégrale suivante: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$.

(b) **Application électrostatique**: Le potentiel électrostatique Φ dû à une distribution de charge de densité ρ est déterminé par l'équation de Poisson

$$-\Delta\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi\rho(\mathbf{x}) \ .$$

Avec le résultat (a) montrer qu'une solution (qui décroit à l'infini si le support de ρ est compact) est

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3x' \ .$$

Indication : Utiliser que $f(\mathbf{x}) = \int d^3x' f(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

(c)* Prendre $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq R\}$, c'est-à-dire la boule de rayon R centrée en $\mathbf{y}$, avec $|\mathbf{y}| < R$. Résoudre (2.1) avec la condition aux limites $G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = 0$ si $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = R$ (c'est-à-dire $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ s'annule sur le bord de Ω). Ici $\mathbf{y}$ joue le rôle d'un paramètre fixe.

Comment peut-on interpréter le résultat en termes électrostatiques ? (La méthode des charges images.)

Indication : On a[1] $\Delta_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{w}|}\right) = 0$ si $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < R$ et $|\mathbf{w} - \mathbf{y}| > R$. Chercher $G(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ de la forme

$$G(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} - \frac{a(\mathbf{y})}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{w}(\mathbf{y})|} \ ,$$

où $a(\mathbf{y})$ est un nombre qui peut dépendre de $\mathbf{y}$, et $\mathbf{w}(\mathbf{y})$ est un vecteur qui peut dépendre de $\mathbf{y}$ et qui satisfait $|\mathbf{w} - \mathbf{y}| > R$ (prendre $\mathbf{w} = b(|\mathbf{y}|)\mathbf{y}$, (pourquoi ?) où $b(|\mathbf{y}|)$ est un nombre qui peut dépendre de $|\mathbf{y}|$).

(d) Donner une interprétation physique de la fonction de Green $G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$.

[1] $\Delta_{\mathbf{x}}$ dénomme le Laplacien par rapport à la variable $\mathbf{x}$.

3 Distribution delta de Dirac

La fonction (plus précisément "la distribution") delta de Dirac en dimension un satisfait à

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x)dx = 1$$

(a) Ecrire explicitement une fonction delta en dimension n, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}^n} \delta^{(n)}(x)d^n x = 1$. Utiliser des coordonnées Cartesiennes.

(b) Démontrer les relations

$$\begin{aligned} \delta(-x) &= \delta(x) \\ \delta(cx) &= \frac{\delta(x)}{|c|} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Soit $y(x)$ une fonction telle que $y(x) = 0$ pour $x \in \{x_n\}_{n=1}^N$ avec $y'(x) \neq 0$ pour $x \in \{x_n\}_{n=1}^N$. Démontrer que

$$\delta(y(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|y'(x_n)|}$$

(c)* Soit $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un système des coordonnées Cartesien. Soit $\mathbf{y} = \Big(y_1(x_1, \cdots x_n), y_2(x_1, \cdots x_n), \cdots y_n(x_1, \cdots x_n)\Big)$ un système de coordonnées curvilignes (par exemple les coordonnées sphériques). Soit $J = \frac{\partial(y_1, \cdots y_n)}{\partial(x_1, \cdots x_n)}$ la matrice jacobienne. Démontrer que

$$\delta^{(n)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\delta^{(n)}(\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_0)}{|J|}$$

où $\mathbf{y}_0$ est le point image de $\mathbf{x}_0$, sous l'application $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$. A l'aide de cette relation (ou autrement), démontrer que la fonction delta en coordonnées sphériques en dimension 3 s'écrit

$$\delta^{(3)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\delta(r)\delta(\theta)\delta(\varphi)$$

avec les définitions

$$\begin{aligned} x_1 &= r\sin\theta\cos\varphi \\ x_2 &= r\sin\theta\sin\varphi \\ x_3 &= r\cos\theta \end{aligned}$$