UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES

Electrodynamique II, série 2
distribué 28 février
à rendre: 6 mars

Prof. Julian Sonner

1 Rappel magnétostatique

Soient F_1 et F_2 deux fils parcouru par les courants I_1 et I_2.

a) Considerons d'abord l'intégrale volumique de la densité de courant

$$\int \mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x$$

Pour un fin filament de courant, décrit par le countour F et la petite surface S (voir Figure 1.1) on a que $d\mathbf{S} \parallel d\boldsymbol{\ell}$ et $d\mathbf{S} \parallel \mathbf{j}$. Montrer que

$$\int_V \mathbf{j} d^3x = \int_{F\times S} \mathbf{j}\, d\mathbf{S} \cdot d\boldsymbol{\ell} = I \int_F d\boldsymbol{\ell} \tag{1.1}$$

où I est le courant parcourant le fil (ici soit I_1, soit I_2). Ceci peut être généralisé pour un champ vecteur quelconque $\mathbf{C}(\mathbf{x})$

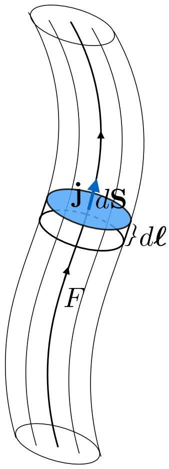
$$\int_V \mathbf{j} \times \mathbf{C} d^3x = I \int_F d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{C}$$

ce que nous utiliserons dans la suite.

b) Ecrire les deux équations qui gouvernent la magnétostatique et démontrer que le champ magnétique satisfait à l'équation

$$\Delta \mathbf{B}(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j}(\mathbf{x})$$

En utilisant la fonction de Green pour l'équation de Laplace (voir série 1) écrire une expression intégrale pour le champ magnétique pour une densité de courant quelconque.



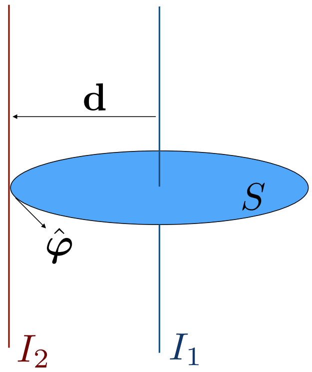


Figure 1.1: a) Fil fin de courant. Le petit volume est borné par le vecteur $d\boldsymbol{\ell}$, ainsi que la petite surface S avec vecteur normale unité $d\mathbf{S}$. b) Deuxième fil de courant à la distance perpendiculaire d.

c) A l'aide des résultats a) & b) ci-dessus, montrer que le champ magnétique d'un fin fil de courant s'écrit sous la forme

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d^3x'$$

Soit F_1 un fin fil droit de courant orienté le long de l'axe des z et soit d la distance perpendiculaire au fil (i.e. la distance dans le plan (x, y), voir Figure 1.1b). Trouver le champ magnétique à la distance d perpendiculaire au fil.

La force par unité de longueur subie par un deuxième fil de courant, F_2, parcouru par un courant I_2 est donné par

$$\mathbf{F}_2 = \frac{I_1 I_2}{c^2}\int_{F_1}\int_{F_2} d\boldsymbol{\ell}_1 \cdot d\boldsymbol{\ell}_2 \frac{\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3}$$

Montrer, alors, que la force par unité de longueur subie par un deuxième fin fil droit F_2, parallèle au F_1, parcouru par le courant I_2 à la distance d est donné par

$$\frac{dF}{dL} = -\frac{2I_1 I_2}{c^2 d} \tag{1.2}$$

et dirigée vers la direction $\hat{\mathbf{d}}$.

2 Unités

Soient $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}, \rho, \mathbf{j}\}$ les champs, la densité de charge et la densité de courant en unités Gaußiennes, et soient $\left\{\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{j}}\right\}$ leurs analogues en unités SI.
Les équations de Maxwell en unités SI s'écrivent

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} &= \tfrac{\tilde{\rho}}{\epsilon_0} & \qquad \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} &= -\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} &= 0 & \qquad \nabla \times \tilde{\mathbf{B}} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t} + \mu_0 \tilde{\mathbf{j}} \end{aligned}$$

Premièrement (dans (a) et (b)), par souci de simplicité utilisons les mêmes unités de longueur et de masse pour les deux systèmes.

a) En écrivant $\mathbf{E} = \lambda_E \tilde{\mathbf{E}}$, $\mathbf{B} = \lambda_B \tilde{\mathbf{B}}$, $\rho = \lambda_\rho \tilde{\rho}$ et $\mathbf{j} = \lambda_j \tilde{\mathbf{j}}$, trouver les constantes de conversion entre le système Gaußien et le système international (SI) des unités. *[Indication: les quatre équations de Maxwell ne donnent lieu qu'à trois conditions indépendantes. Les quatre constantes ne sont alors déterminées qu'à un facteur près]*

b) Quelle équation déjà rencontrée dans le cours pourrait servir comme quatrième relation indépendante? En portant les résultats de a) dans cette équation, déterminer toutes les quatre constantes de conversion.

c) Le système Gaußien est un système cgs, (centimètre, gramme, seconde), tandis que le système international (SI) est un système MKS (mètre, kilogramme, seconde). On doit alors aussi convertir la longueur L et la masse M à l'aide des nombres purs,
$$L \to \lambda_L L\,, \qquad M \to \lambda_M M \qquad \text{où } \lambda_L = 10^2 \text{ et } \lambda_M = 10^3$$
Le temps de désintégration[1], τ, d'un électron en orbite dans un champ magnétique $\mathbf{B}$ s'écrit en unités Gaußiennes
$$\tau = \frac{3m^3c^5}{4e^4B^2} \tag{2.1}$$
où m est la masse de l'électron, et e est sa charge. Supposons que le champs magnétique vaut $B = 10^4$ gauss.

1. Ecrire la masse, la charge et la vitesse de la lumière en unités Gaußiennes. Que vaut le temps de désintégration en unités Gaußiennes?
2. En utilisant les résultats de a) et b) écrire la formule (2.1) en unités SI. Ecrire la masse, la charge et la vitesse de la lumiére en unités SI. Que vaut le temps de désintégration en unités SI?

[1] L'orbite est instable à cause d'emission continue du rayonnement électromagnétique. Nous allons étudier ce genre de processus en détail plus tard dans le cours.

3 Transformation de jauge

Dans cet exercise nous considérons une situation statique et nous nous concentrons sur le champ magnétostatique.

a) Ecrire le champ magnétique en terme du potentiel vectoriel $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Montrer que, dans la jauge de Coulomb, le potentiel vectoriel satisfait à l'équation

$$\Delta \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{x})$$

Cette relation ressemble à l'équation de Poisson satisfait par le potential scalaire. Utiliser cette analogie pour trouver la solution générale

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}d^3x' \tag{3.1}$$

b) Démontrer, par calcul explicite, que la solution générale (3.1) satisfait à la condition définissant la jauge de Coulomb

c) Trouver la transformation de jauge, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \to \mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla\chi(\mathbf{x})$, qui conduit au potential vectoriel

$$\mathbf{A}'(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x}-\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3}d^3x'$$

d) Jauge de Lorenz: Soient $\mathbf{A}$ et Φ les potentiels électromagnétiques. Supposons qu'ils ne satisfont pas à la condition de Lorenz. Trouver les conditions (sur λ) sous lesquelles la transformation de jauge

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\lambda\,, \qquad \Phi' = \Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\lambda}{\partial t} \tag{3.2}$$

conduit à la condition de Lorenz, à savoir

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c}\frac{\partial \Phi'}{\partial t} = 0$$

Une telle transformation peut-elle toujours être trouvée? Une fois transformés dans la jauge de Lorenz, les potentiels $\mathbf{A}'$ et Φ' sont-ils uniquement déterminés?