Electrodynamique II, série 3
distribué 7 mars
à rendre: 13 mars

Prof. Julian Sonner

Les problèmes dotés d'une étoile (*) sont censés plus difficile. Les problèmes avec deux étoiles (**) sont optionnels, soit car ils vont au delà du cours soit car ils sont très difficile. Ils servent à illustrer, pour ceux qui veulent, des connexions avec d'autres cours.

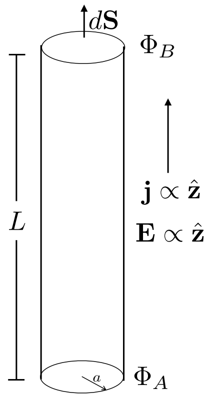
1 Application du théorème de Poynting

Dans ce problème nous considérons le bilan d'énergie dans un fil de courant de longueur L et rayon a. D'abord quelques formules. La loi d'Ohm s'écrit

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

où la quantité σ est la conductivité. La résistance R s'écrit en terme de la différence du potentiel $V = \Phi_B - \Phi_A$ et le courant $I = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$ comme

$$R = \frac{V}{I}$$



a) Trouver une formule explicite pour la résistance d'un fil de courant de rayon a et longueur L en terme de ces quantités ainsi que la conductivité σ.

b) Démontrer que le travail instantané accompli par les charges qui conduisent le courant s'écrit

$$\frac{dW}{dt} = I^2 R$$

[Indication: il est nécessaire d'utiliser que le courant est stationnaire, $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$*]*

c) Trouver le vecteur de Poynting à la surface du fil du courant et donner une interprétation physique de votre résultat à l'aide de ce que vous avez démontré dans la partie (a) et (b).

2 Tenseur des contraintes avec charge magnétique

Les équations de Maxwell dans un monde avec charge magnétique ainsi qu'électrique s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_e & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \eta\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_m \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_m & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_e \end{aligned} \tag{2.1}$$

avec, pour le moment, le signe arbitraires $\eta = \pm 1$, que vous aller déterminer par la suite. Nous dénommons la densité de charge électrique ρ_e et la densité de charge magnétique ρ_m, et de même pour les densités de courant $\mathbf{j}_e$ et $\mathbf{j}_m$.

a) Formuler et démontrer le théorème de Poynting. Exiger que le théorème de Poynting prenne la forme habituelle, ce qui fixera le signe.
[Indication: Commencer avec la densité de force de Lorentz généralisé $\mathbf{f} = \rho_e\mathbf{E} + \rho_m\mathbf{B} + \frac{\mathbf{j}_e}{c} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}_m}{c} \times \mathbf{E}$. *Pour le bon choix de signe* η*, la démonstration ici devrait devenir plus simple et plus directe que celle dans le polycopié.]*

b) Ayant déterminé le signe η et donc la forme des équations de Maxwell dans ce monde hypothétique, écrire les transformations entre $(\mathbf{E}\,, \mathbf{B})$, $(\rho_e\,, \rho_m)$ et $(\mathbf{j}_e\,, \mathbf{j}_m)$ qui laissent invariants le système de quatre équations (2.1). Ceci s'appèle la dualité électromagnétique.

c)* Formuler et prouver la lois de conservation de la quantité de mouvement pour le système (2.1).

3 Charges, monopoles and strings, these are some of my favorite things

a) Dans le monde hypothétique où votre version nouvelle de l'électromagnétisme (2.1) s'applique, on considère une situation avec une charge ponctuelle magnétique au repos à l'origine. Son champ suit d'après l'équation $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_m$ avec $\rho_m = q_m\delta^{(3)}(\mathbf{x})$. Ecrire le champ magnétique d'un tel monopole.

Peut-on écrire ce champ en tant que rotationnel d'un seul potentiel vecteur non-singulier

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \ ?$$

[Indication: considerer le flux magnétique $\Phi = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ *à travers d'une surface autour de la charge* q_m *]*

b)* D'après votre argument dans la partie a), le potentiel vectoriel d'une charge magnétique ne peut pas s'exprimer à l'aide d'un *seul* potentiel $\mathbf{A}$. Montrer que le potentiel $\mathbf{A}^N_{\text{Dirac}}$ avec

$$(A^N_{\text{Dirac}})_x = \frac{-q_m y}{r(r+z)}, \qquad (A^N_{\text{Dirac}})_y = \frac{q_m x}{r(r+z)}, \qquad (A^N_{\text{Dirac}})_z = 0 \tag{3.1}$$

donne lieu à

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{q_m}{r^3}\mathbf{x} + 4\pi q_m \delta(x)\delta(y)\theta(-z)\hat{\mathbf{z}}$$

Ici $\theta(t) = 0$ si $t < 0$ et $\theta(t) = 1$ si $t > 0$. Le potentiel $\mathbf{A}^N_{\text{Dirac}}$ est donc un bon choix seulement sur l'espace $z > 0$. Montrer que $\mathbf{A}^S_{\text{Dirac}}$ avec

$$(A^S_{\text{Dirac}})_x = \frac{q_m y}{r(r-z)}, \qquad (A^S_{\text{Dirac}})_y = \frac{-q_m x}{r(r-z)}, \qquad (A^S_{\text{Dirac}})_z = 0 \tag{3.2}$$

est le bon choix pour $z < 0$. La singularité le long l'axe des z dans tous les deux cas s'appèle le 'string[1] de Dirac'.

c)** (Optionnel. Nécessite connaissance de MQ)
Soit (r, θ, ϕ) un système des coordonnées sphériques. Montrer que

$$\mathbf{A}^N_{\text{Dirac}} = \frac{q_m(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi \tag{3.3}$$

$$\mathbf{A}^S_{\text{Dirac}} = -\frac{q_m(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi \tag{3.4}$$

avec $\mathbf{e}_\phi = -\sin\phi\mathbf{e}_x + \cos\phi\mathbf{e}_y$. Trouver la transformation de jauge qui relie $\mathbf{A}^S_{\text{Dirac}}$ avec $\mathbf{A}^N_{\text{Dirac}}$ dans le plan $\theta = \pi/2$.

La fonction d'onde d'une charge ponctuelle électrique q_e immergée dans le champ $\mathbf{B}$ subit la transformation de jauge

$$\psi^S(\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{-iq_e\lambda}{\hbar c}\right)\psi^N(\mathbf{x})$$

Démontrer que ceci implique que la charge doit forcement être quantitifée

$$q_e q_m = \frac{\hbar c n}{2} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Remarque / Contexte

Dirac (1931) proposa d'utiliser les deux potentiels ci-dessus pour la description d'un monopole magnétique. Dans un tel monde la charge est forcement quantifée. L'existence d'un seul monopole dans l'Univers donc impliquerait la quantification de toute charge électrique et servirait comme explication fondamentale de ce fait bien vérifié expérimentalement. En fait la recherche expérimentale pour des monopoles magnétiques se poursuit aujourd'hui. De tels configurations sont prédites par plusieurs généralisations du modèle standard de la physique des particules, mais la limite supérieure de la densité de monopoles actuelle est 10^{-29} par nucleon.

[1] mais n'a rien à voir avec le string de la théorie des cordes.