Electrodynamique II, série 4
distribué 15 mars
à rendre: 21 mars

Prof. Julian Sonner

Les problèmes dotés d'une étoile (*) sont censés être plus difficiles. Les problèmes avec deux étoiles (**) sont optionnels, soit car ils vont au delà du cours soit car ils sont très difficile. Ils servent à illustrer, pour ceux qui veulent, des connexions avec d'autres cours.

1 Transformations de Lorentz

[d'après Jackson 11.1].
Dans ce problème il s'agit de trouver une démonstration des transformations de Lorentz différente de celle du cours.

Soient deux référentiels inertiels K et K'. Le référentiel K' est animé par rapport à K d'un mouvement de vitesse v dans la direction des x positifs. Les axes des deux référentiels sont parallèles et leurs origines coïncident aux temps $t = t' = 0$.

a) Montrer que le premier postulat d'Einstein et l'isotropie et l'homogénéité de l'espace-temps imposent que

$$x' = f(v^2)x - vf(v^2)t\,, \qquad t' = g(v^2)t - vh(v^2)x\,, \qquad y' = y\,, \qquad z' = z \tag{1.1}$$

avec pour transformation inverse

$$x = f(v^2)x' + vf(v^2)t'\,, \qquad t = g(v^2)t' + vh(v^2)x'\,, \qquad y = y'\,, \qquad z = z'$$

où la forme des fonctions f, g, h sera déterminé par la suite.

b) Montrer que la cohérence des transformations initiales et inverse impose

$$f = g \qquad \text{et} \qquad f^2 - v^2 fh = 1$$

c)* Soit un corps phyique animé d'une vitesse u' parallèle à l'axe x' de K'. Montrer que sa vitesse u parallèle à l'axe des x de K s'écrit

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'h/f}$$

Montrer que le deuxième postulat d'Einstein a pour conséquence

$$h = f/c^2$$

avec c la vitesse de la lumière, ce qui entraîne que (1.1) prennent la forme d'une transformation de Lorentz habituelle.

2 Distances et causalité

La distance entre deux événements $E = (ct, x^1, x^2, x^3)$ et $E' = (ct', y^1, y^2, y^3)$ est appellée

de genre temps	si	$s^2 = -(ct - ct')^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 < 0$
de genre lumière	si	$s^2 = -(ct - ct')^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 = 0$
de genre espace	si	$s^2 = -(ct - ct')^2 + (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2 > 0$

Montrer que

a) Si la distance entre E et E' est de genre temps, il existe un référentiel tel que E et E' ont lieu à la même position spatiale. Trouver ce référentiel.

b) Si la distance entre E et E' est de genre espace, il existe un référentiel tel que E et E' sont simultanés, c'est-à-dire ont lieu en même temps. Trouver ce référentiel.

c) Soit $E_1 = (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ l'événement "Gillaume Tell lance une flèche" et soit $E_2 = (ct_2, x_2, y_2, z_2)$ l'événement "la flèche coupe la pomme en deux". Soit v la vitesse de la flèche. Si $v > c$ (la flèche se déplace plus vite que la lumière!), montrer qu'on peut trouver un référentiel dans lequel la flèche coupe la pomme avant être tirée. Discuter la notion de causalité dans un monde où des objets peuvent se déplacer à $v > c$.

3 Boost en direction arbitraire

Sous un boost en direction x avec vitesse v les coordonnées changent d'après

$$t' = \gamma(t - vx/c^2)\,, \qquad x' = \gamma(x - vt)\,, \quad y' = y\,, \quad z' = z\,.$$

Montrer que sous en boost avec vitesse $\mathbf{v}$ en direction quelconque, les coordonnées changent comme suit

$$t' = \gamma(t - \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}/c^2)\,, \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x})\boldsymbol{\beta} - \gamma \mathbf{v} t\,,$$

où $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ et $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.