Electrodynamique II, série 5
distribué 21 mars
à rendre: 27 mars

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES

Prof. Julian Sonner

Les problèmes dotés d'une étoile (*) sont censés être plus difficiles. Les problèmes avec deux étoiles (**) sont optionnels, soit car ils vont au delà du cours soit car ils sont très difficiles. Ils servent à illustrer, pour ceux qui veulent, des connexions avec d'autres cours.

## 1 Contraction des longueurs relativiste

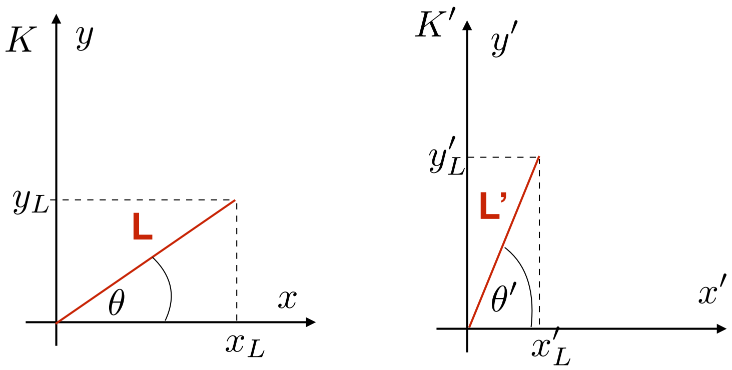


Figure 1.1: Une tige $L$ au repos dans le référentiel $K$. Le référentiel $K'$ se déplace à la vitesse $v$ le long l'axe des $x$, avec la configuration des axes comme indiquée.

Deux systèmes inérertiels $K$ et $K'$ sont en translation uniforme à la vitesse $v$ (relativiste) le long l'axe des $x$. Une tige liée au référentiel $K$, de longueur au repos $L$, fait un angle $\theta$ avec l'axe des $x$. Calculer la longueur $L'$ et l'angle $\theta'$ dans $K'$. Voir figure 1.1.

[*Indication*: démontrer la contraction relativiste de longueur à l'aide des transformations de Lorentz. Considérer d'abord les deux cas limites de $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$]

## 2 Transformations de Lorentz II

Une transformation de Lorentz est une matrice $4 \times 4$ réelle, $\Lambda$, qui satisfait à

$$\Lambda^T g \Lambda = g \qquad \text{où} \qquad g = \mathrm{diag}\,(-1, 1, 1, 1)\ . \tag{2.1}$$

En notation avec indices nous écrivons $\Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\sigma} \Lambda^\sigma{}_\rho = g_{\nu\rho}$. Montrer que

a) $g^{-1} = g$, où en notation avec les indices $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu} g^{\nu\lambda} = \delta^\lambda_\mu$.

b) $(\Lambda^T)^{-1} = g\Lambda g$, où en notation avec les indices $(\Lambda^\mu{}_\nu)^{-1} = \Lambda_\mu{}^\nu$.

c) Si $\Lambda_1$ et $\Lambda_2$ sont des transformations de Lorentz, alors $\Lambda_1\Lambda_2$ en est aussi une.

d) Si $\Lambda$ est une transformations de Lorentz aussi $\Lambda^{-1}$ en est une. (Donc les transformation de Lorentz forment un groupe.)

e) Si $\Lambda$ est une transformation de Lorentz $|\Lambda^0_0| \geq 1$.

[*Indication*: Les points (c) et (d) sont plus facile en notation matricielle].

## 3 Invariants de Lorentz du champ électromagnétique

Une transformation, $\Lambda$, de Lorentz (2.1) qui satisfait, de plus, à $\det \Lambda = 1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 0$ est appelée un élément du *groupe du Lorentz propre*, dénommé $\Lambda \in L_+^\uparrow$.

a) Montrer que $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2$ et $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ sont invariants sous les transformations de Lorentz $\Lambda \in L_+^\uparrow$.

   [*Indication: Utiliser les champs tensoriels* $F_{\mu\nu}$ et $*F_{\mu\nu}$.]

b) Si $4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2 + (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 \neq 0$, il existe toujours une transformation de Lorentz telle que les champs transformés $\mathbf{E}'$ et $\mathbf{B}'$ soient parallèles.

   [*Indication*: Essayer un boost de direction $\mathbf{v}$ parallèle à $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$. Choisir l'axe $\mathbf{e}_1$ parallèle à $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ et utiliser les formules de transformation pour $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.]

c)* Soit $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Montrer qu'il existe une transformation de Lorentz telle que le champ transformé $\mathbf{B}' = 0$ si $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 > 0$ ou $\mathbf{E}' = 0$ si $\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 < 0$.

   [*Indication*: Utiliser a) et b).]